• 수학 영역 •

※ 본 전국연합학력평가는 17개 시도 교육청 주관으로 시행되며, 해당 자료는 EBSi에서만 제공됩니다.
무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

정 답

1	④	2	②	3	②	4	④	5	③
6	⑤	7	③	8	②	9	⑤	10	④
11	⑤	12	⑤	13	①	14	②	15	④
16	①	17	③	18	②	19	①	20	①
21	⑤	22	13	23	3	24	20	25	134
26	68	27	42	28	37	29	121	30	64

해 설

1. [출제의도] 근호를 포함한 식의 값을 계산한다.

$$\sqrt{6}\times\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{3}=\sqrt{6\times\frac{1}{2}}+\sqrt{3}$$
$$=\sqrt{3}+\sqrt{3}$$
$$=2\sqrt{3}$$

2. [출제의도] 일차함수의 그래프를 이해하여 기울기와 y절편의 곱을 구한다.

일차함수 $y=2x+3$의 그래프에서 기울기는 2이고, y절편은 3이다.
따라서 기울기와 y절편의 곱은 $2\times3=6$

3. [출제의도] 이차방정식의 근의 공식을 이용하여 해를 계산한다.

이차방정식 $x^2-3x-1=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$$
$$=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$$

이때 $\sqrt{9}<\sqrt{13}$, 즉 $3<\sqrt{13}$이므로

$\frac{3+\sqrt{13}}{2}>0$, $\frac{3-\sqrt{13}}{2}<0$

따라서 이차방정식 $x^2-3x-1=0$의 양수인 근은

$$x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

4. [출제의도] 피타고라스 정리를 이해하여 삼각비를 구한다.

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$$
$$=3^2+(\sqrt{7})^2$$
$$=16$$

$\overline{AC}=4$

따라서 $\cos A=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{3}{4}$

5. [출제의도] 도수분포다각형을 이해하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.

키가
160cm 이상 165cm 미만인 학생의 수는 7,
165cm 이상 170cm 미만인 학생의 수는 6,
170cm 이상 175cm 미만인 학생의 수는 5,
175cm 이상 180cm 미만인 학생의 수는 2
이므로 키가 160cm 이상인 학생의 수는
$7+6+5+2=20$

6. [출제의도] 연립방정식의 해를 계산한다.

$$\begin{cases} x+2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-3y=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

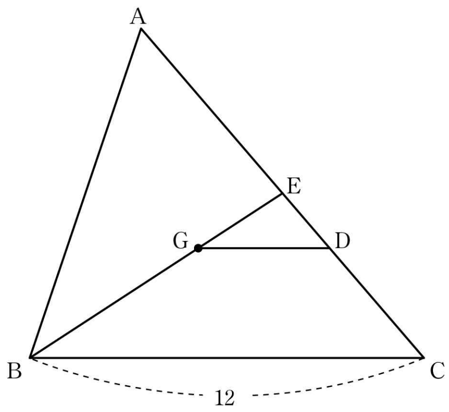
㉠의 양변에 2를 곱하면
$2x+4y=2$ …… ㉢
㉢에서 ㉡을 변끼리 빼면
$7y=-7$, $y=-1$
$y=-1$을 ㉠에 대입하면
$x+2\times(-1)=1$, $x=3$
이므로 구하는 연립방정식의 해는
$x=3$, $y=-1$
따라서 $a=3$, $b=-1$이므로
$a+b=3+(-1)=2$

7. [출제의도] 다항식의 곱셈을 이해하여 직육면체의 겉넓이를 구한다.

주어진 직육면체의 세 모서리의 길이가
$x-1$, $x+1$, $2x+1$이므로 이 직육면체의 겉넓이는

$$2\times\{(x-1)(x+1)+(x+1)(2x+1)+(2x+1)(x-1)\}$$
$$=2\times\{(x^2-1)+(2x^2+3x+1)+(2x^2-x-1)\}$$
$$=2\times(5x^2+2x-1)$$
$$=10x^2+4x-2$$

8. [출제의도] 삼각형의 무게중심과 삼각형의 닮음의 성질을 이해하여 선분의 길이를 구한다.



직선 BG와 선분 AC의 교점을 E라 하자.
점 G가 삼각형 ABC의 무게중심이므로
$\overline{BG}:\overline{GE}=2:1$
두 삼각형 EGD, EBC에서
∠GED는 공통이고, 선분 GD와 선분 BC가 서로 평행하므로 ∠DGE = ∠CBE (동위각)
그러므로 두 삼각형 EGD, EBC는 서로 닮음이고,
닮음비는 $\overline{EG}:\overline{EB}=1:3$이다.
따라서 $\overline{GD}:\overline{BC}=1:3$이므로

$$\overline{GD}=\frac{1}{3}\times\overline{BC}=\frac{1}{3}\times12$$
$$=4$$

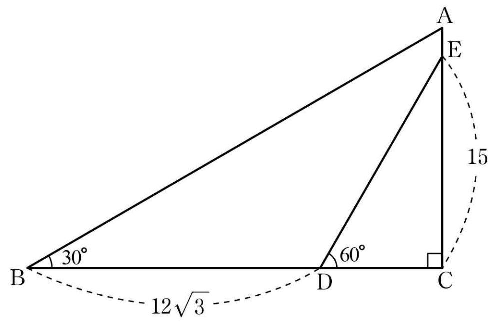
9. [출제의도] 일차방정식을 이해하여 실생활 문제와 관련된 값을 구한다.

이 학생이
첫째 날에 달린 거리는 xm,
둘째 날에 달린 거리는 $(x+300)$m,
셋째 날에 달린 거리는 $(x+600)$m이고,
넷째 날부터 일곱째 날까지는 매일 $(x+600)$m씩 달렸다.
이 학생이 7일 동안 달린 총 거리(m)는
$x+(x+300)+(x+600)+4(x+600)=7x+3300=8900$
$7x=5600$
$x=800$

10. [출제의도] 주어진 상황을 이해하여 확률을 구한다.

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$
나오는 눈의 수를 각각 a, b라 하고 이것을 순서쌍 (a, b)로 나타내면 눈의 수의 합이 소수인 경우는 다음과 같다.
(ⅰ) $a+b=2$인 경우
 (1, 1)의 1가지
(ⅱ) $a+b=3$인 경우
 (1, 2), (2, 1)의 2가지
(ⅲ) $a+b=5$인 경우
 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지
(ⅳ) $a+b=7$인 경우
 (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)의 6가지
(ⅴ) $a+b=11$인 경우
 (5, 6), (6, 5)의 2가지
(ⅰ)~(ⅴ)의 경우는 동시에 일어나지 않으므로 나오는 눈의 수의 합이 소수인 경우의 수는
$1+2+4+6+2=15$
따라서 구하는 확률은 $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

11. [출제의도] 삼각비를 이해하여 선분의 길이를 구한다.



직각삼각형 EDC에서

$\tan60^\circ=\frac{15}{\overline{CD}}$

$\overline{CD}=\frac{15}{\tan60^\circ}=\frac{15}{\sqrt{3}}=5\sqrt{3}$

$\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{DC}$
$=12\sqrt{3}+5\sqrt{3}=17\sqrt{3}$

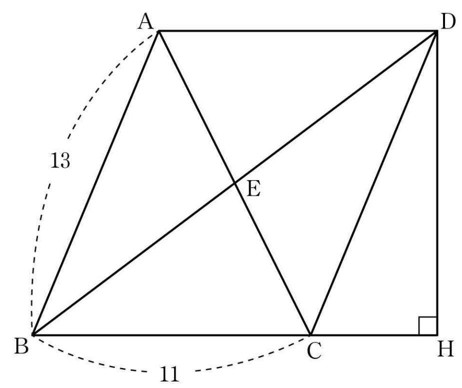
직각삼각형 ABC에서

$\tan30^\circ=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AC}}{17\sqrt{3}}$

$\overline{AC}=17\sqrt{3}\times\tan30^\circ$
$=17\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=17$

$\overline{AE}=\overline{AC}-\overline{EC}=17-15$
$=2$

12. [출제의도] 평행사변형의 성질과 피타고라스 정리를 이해하여 선분의 길이를 구한다.



평행사변형 ABCD의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{BE}=\overline{ED}$
두 삼각형 BCE, DEC의 밑변을 각각 선분 BE, 선분 ED라 하면 두 삼각형의 높이가 같으므로
△DEC = △BCE = 33
△DBC = △BCE + △DEC
 = 33 + 33 = 66
점 D에서 선분 BC의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle DBC=\frac{1}{2}\times11\times\overline{DH}=66$

$\overline{DH}=12$
평행사변형에서 대변의 길이는 서로 같으므로
$\overline{AB}=\overline{DC}=13$
직각삼각형 DCH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{DC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{DH}^2$

$13^2 = \overline{CH}^2 + 12^2$

$\overline{CH}^2 = 13^2 - 12^2 = 25$

$\overline{CH} = 5$ 이므로

$\overline{BH} = \overline{BC} + \overline{CH}$

$= 11 + 5 = 16$

직각삼각형 DBH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BD}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{DH}^2$

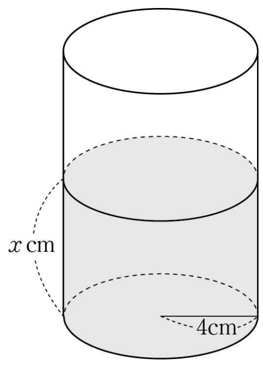
$= 16^2 + 12^2$

$= 400$

따라서 $\overline{BD} = 20$

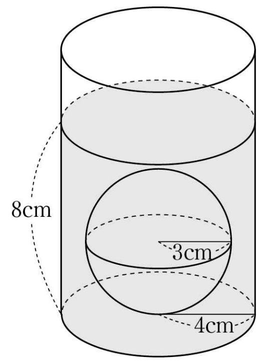
13. [출제의도] 원기둥의 부피와 구의 부피를 이용하여 원기둥의 높이를 구하는 문제를 해결한다.

[그림 1]에서 원기둥 모양의 그릇에 채워진 물의 부피는 $\pi \times 4^2 \times x = 16\pi x\ (\text{cm}^3)$



[그림 1]

[그림 2]에서 원기둥 모양의 그릇에 채워진 물과 쇠구슬의 부피의 합은 $\pi \times 4^2 \times 8 = 128\pi\ (\text{cm}^3)$



[그림 2]

이때 구 모양의 쇠구슬의 부피는

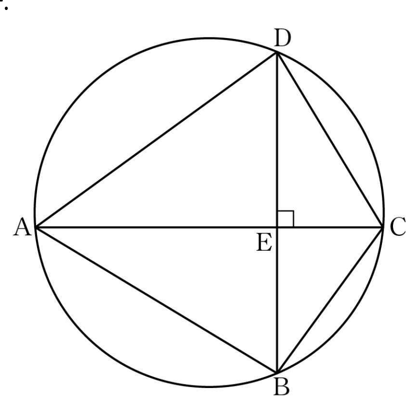
$\frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = 36\pi\ (\text{cm}^3)$ 이므로

$16\pi x + 36\pi = 128\pi$

$16x = 92$

따라서 $x = \frac{23}{4}$

14. [출제의도] 원주각의 성질을 이해하여 각의 크기를 구한다.



호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하고,
중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로
호의 길이는 원주각의 크기에 정비례한다.
각 ACB는 호 AB에 대한 원주각이고,
각 CBD는 호 CD에 대한 원주각이므로
(호 AB의 길이):(호 CD의 길이)$= 3 : 2$에서
$\angle ACB : \angle CBD = 3 : 2$

$\angle CBD = \frac{2}{3} \times \angle ACB$

사각형 ABCD의 두 대각선이 만나는 점을 E라 하면 삼각형 CEB는 $\angle BEC = 90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\angle ACB + \angle CBD = \angle ACB + \frac{2}{3} \times \angle ACB$

$= \frac{5}{3} \times \angle ACB = 90^\circ$

따라서 $\angle ACB = \frac{3}{5} \times 90^\circ = 54^\circ$

15. [출제의도] 다항식의 인수분해를 이해하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.

a, c가 자연수이고, $x+c$가 $x^2+ax+27$의 인수이므로 c는 27의 약수이다.
b, c가 자연수이고, $x+c$가 $x^2+bx-18$의 인수이므로 c는 18의 약수이다.
즉, c가 27과 18의 공약수이므로 c는 27과 18의 최대공약수인 9의 약수이다.

(ⅰ) $c=1$일 때

$x^2+ax+27=(x+1)(x+27)$에서

$a = 1+27 = 28$

$x^2+bx-18=(x+1)(x-18)$에서

$b = 1+(-18) = -17$

이때 b는 자연수가 아니다.

(ⅱ) $c=3$일 때

$x^2+ax+27=(x+3)(x+9)$에서

$a = 3+9 = 12$

$x^2+bx-18=(x+3)(x-6)$에서

$b = 3+(-6) = -3$

이때 b는 자연수가 아니다.

(ⅲ) $c=9$일 때

$x^2+ax+27=(x+9)(x+3)$에서

$a = 9+3 = 12$

$x^2+bx-18=(x+9)(x-2)$에서

$b = 9+(-2) = 7$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $a=12$, $b=7$, $c=9$

따라서 $a+b+c = 12+7+9 = 28$

16. [출제의도] 일차함수의 그래프의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$y = \frac{1}{2}x+4$에 $y=0$을 대입하면

$0 = \frac{1}{2}x+4$, $x=-8$이므로

점 A의 좌표는 $(-8, 0)$

$y = \frac{1}{2}x+4$에 $x=0$을 대입하면

$y=4$이므로

점 B의 좌표는 $(0, 4)$

$y = ax-2a$에 $y=0$을 대입하면

$ax = 2a$

$a>0$에서 $x=2$이므로

점 C의 좌표는 $(2, 0)$

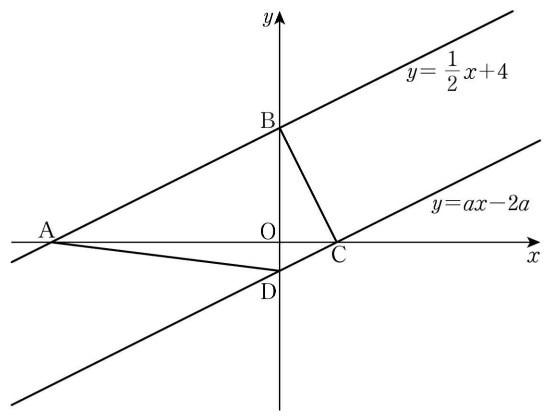
$y = ax-2a$에 $x=0$을 대입하면

$y = -2a$이므로

점 D의 좌표는 $(0, -2a)$

사각형 ADCB가 사다리꼴이 되기 위해서는 두 직선 AB, CD가 서로 평행하거나 두 직선 BC, AD가 서로 평행해야 한다.

(ⅰ) 두 직선 AB, CD가 서로 평행한 경우

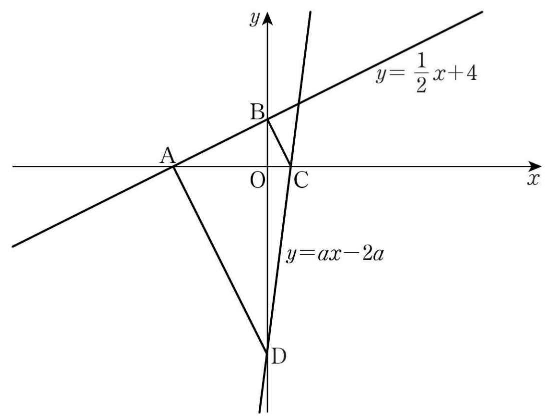


직선 $y = \frac{1}{2}x+4$의 기울기는 $\frac{1}{2}$,

직선 $y = ax-2a$의 기울기는 a이므로

$a = \frac{1}{2}$

(ⅱ) 두 직선 BC, AD가 서로 평행한 경우



직선 BC의 기울기는

$\frac{0-4}{2-0} = \frac{-4}{2} = -2$

직선 AD의 기울기는

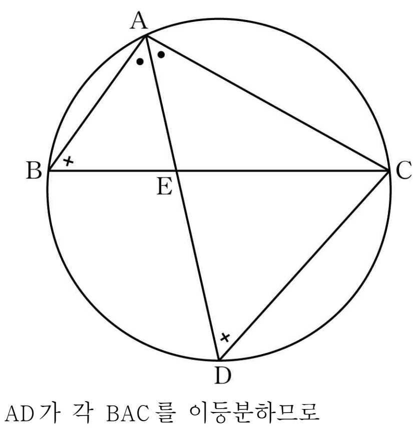
$\frac{-2a-0}{0-(-8)} = \frac{-2a}{8} = -\frac{a}{4}$이므로

$-2 = -\frac{a}{4}$, $a=8$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 a의 값의 합은

$\frac{1}{2}+8 = \frac{17}{2}$

17. [출제의도] 원주각의 성질과 삼각형의 닮음을 이해하여 선분의 길이를 구한다.

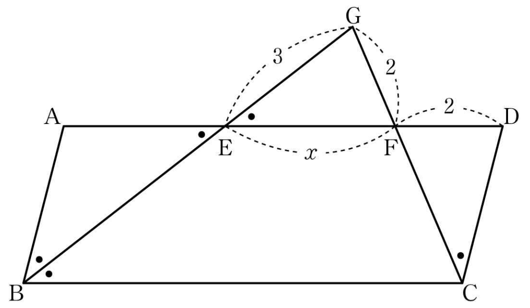


선분 AD가 각 BAC를 이등분하므로
$\angle BAD = \angle DAC$
각 CBA와 각 CDA는 호 CA에 대한 원주각이므로
$\angle CBA = \angle CDA$
그러므로 두 삼각형 ABE, ADC는 서로 닮음이다.
선분 DE의 길이를 x라 하면
선분 AE의 길이는 $6-x$
$\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AE} : \overline{AC}$에서
$3 : 6 = (6-x) : 5$

$6(6-x) = 15$, $6-x = \frac{5}{2}$

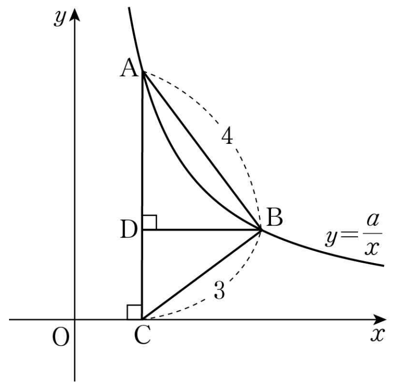
따라서 $x = \frac{7}{2}$

18. [출제의도] 삼각형의 닮음과 이차방정식을 이용하여 선분의 길이를 추론한다.



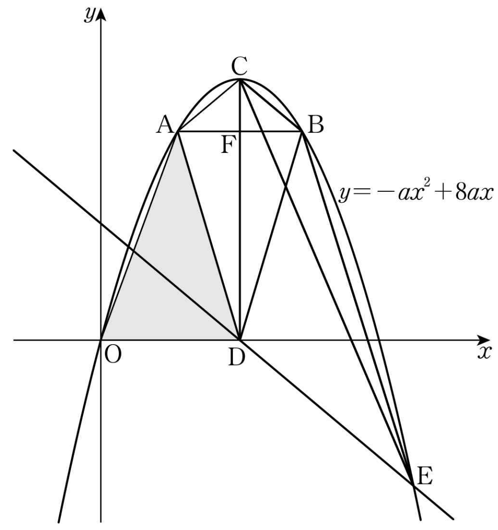
$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$ 이므로 $\angle FEG=\angle CBE$ (동위각)
사각형 ABCD가 평행사변형이고
$\angle EBA=\angle CBE$ 이므로
$\angle FDC=\angle CBA$
$=2\times\angle CBE$
$\angle FDC=2\times\angle DCF$ 이므로 $\angle CBE=\angle DCF$
$\angle FEG=\angle DCF$
$\angle GFE=\angle DFC$ (맞꼭지각)
그러므로 두 삼각형 GEF, DCF에서
$\angle FEG=\angle FCD$, $\angle GFE=\angle DFC$
삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180° 이므로
$\angle EGF=\angle CDF$
$\angle GFE=\angle DFC$, $\angle EGF=\angle CDF$, $\overline{FG}=\overline{FD}=2$ 이므로
삼각형 GEF와 삼각형 DCF는 서로 합동이다.
따라서 $\overline{EG}=\overline{CD}=3$ 이고 사각형 ABCD는 평행사변형이므로 $\overline{AB}=\overline{CD}=3$
$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$ 이므로 $\angle AEB=\angle CBE$ (엇각)
$\angle EBA=\angle CBE$ 이므로 $\angle EBA=\angle AEB$
삼각형 ABE는 $\overline{AE}=\overline{AB}$ 인 이등변삼각형이므로
$\overline{AE}=\overline{AB}=3$
선분 EF의 길이를 x라 하면
$\overline{BC}=\overline{AD}$
$=\overline{AE}+\overline{EF}+\overline{FD}$
$=x+5$
또한 $\overline{EF}=\overline{FC}$ 이므로
$\overline{GC}=\overline{GF}+\overline{FC}$
$=x+2$
삼각형 GBC에서 $\overline{EF}/\!/\overline{BC}$ 이므로
$\overline{EF}:\overline{BC}=\overline{GF}:\overline{GC}$
$x:(x+5)=2:(x+2)$
$2(x+5)=x(x+2)$
$x^2=10$
$x=\sqrt{10}$ $(x>0)$
따라서 선분 EF의 길이는 $\sqrt{10}$

19. **[출제의도] 반비례 관계의 그래프와 피타고라스 정리를 이용하여 상수의 값을 추론한다.**



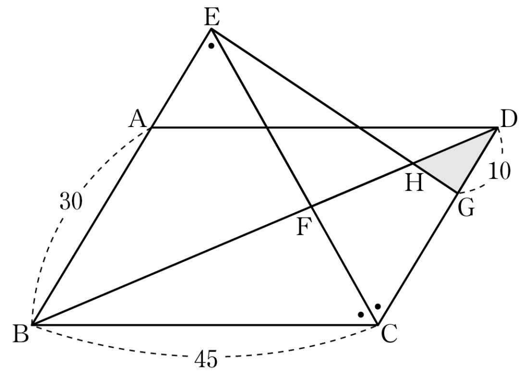
직각삼각형 ACB에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AC}^2=3^2+4^2=25$
$\overline{AC}=5$
점 A는 반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$의 그래프 위의 점이므로
$A\left(\frac{a}{5},\ 5\right)$
점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 D라 하면
$\triangle ACB=\frac{1}{2}\times5\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times3\times4=6$
$\overline{BD}=\frac{12}{5}$
직각삼각형 DCB에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{CB}^2=\overline{DC}^2+\overline{BD}^2$
$3^2=\overline{DC}^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2$
$\overline{DC}^2=\frac{81}{25}$, $\overline{DC}=\frac{9}{5}$
점 B의 좌표가 $\left(\frac{a+12}{5},\ \frac{9}{5}\right)$이고,
점 B는 반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$의 그래프 위의 점이므로
$\frac{a+12}{5}\times\frac{9}{5}=a$
$9(a+12)=25a$, $16a=108$
$a=\frac{27}{4}$

20. **[출제의도] 이차함수의 그래프의 성질을 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.**



두 삼각형 CEB, CDB의 밑변을 선분 BC라 하면
선분 BC와 직선 DE가 서로 평행하므로 두 삼각형의 높이가 같다.
그러므로 $\triangle CEB=\triangle CDB$
선분 AB와 선분 CD의 교점을 F라 하자.
이차함수 $y=-ax^2+8ax$의 그래프는 직선 CD에 대하여 대칭이고, 두 점 A, B의 y좌표가 같으므로
$\triangle CAF=\triangle CFB$
따라서 $\triangle CAB=2\times\triangle CFB$
$\triangle CAB:\triangle CEB=\triangle CAB:\triangle CDB=2:5$ 이므로
$\triangle CFB:\triangle CDB=1:5$
두 삼각형 CFB, CDB의 높이를 $\overline{FB}$라 하면 밑변의 길이의 비가 $1:5$이다. 즉, $\overline{CF}:\overline{CD}=1:5$
$y=-ax^2+8ax=-a(x-4)^2+16a$
이므로 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점 C의 좌표는 $(4,\ 16a)$
$a>0$ 이므로 $\overline{CD}=16a$
$\overline{CF}:\overline{CD}=1:5$ 이고 $\overline{CD}=\overline{CF}+\overline{FD}$ 이므로
$\overline{FD}=\frac{4}{5}\times\overline{CD}$
$=\frac{4}{5}\times16a$
$=\frac{64}{5}a$
점 F와 점 A의 y좌표가 같으므로
점 A의 y좌표는 $\frac{64}{5}a$
점 D는 점 $C(4,\ 16a)$에서 x축에 내린 수선의 발이므로 점 D의 좌표는 $(4,\ 0)$
삼각형 AOD의 밑변 OD의 길이는 4, 높이는 $\frac{64}{5}a$
$\triangle AOD=\frac{1}{2}\times4\times\frac{64}{5}a=12$ 이므로
$a=\frac{15}{32}$

21. **[출제의도] 평행사변형의 성질과 삼각형의 닮음을 이용하여 넓이를 구하는 문제를 해결한다.**



직선 AB와 직선 DC가 서로 평행하므로
$\angle BEC=\angle DCE$ (엇각)
$\angle DCE=\angle ECB$ 에서 $\angle BEC=\angle ECB$ 이므로
삼각형 BCE는 $\overline{BE}=\overline{BC}$ 인 이등변삼각형이다.
즉, $\overline{BE}=45$
$\overline{AE}=\overline{BE}-\overline{BA}=45-30=15$
두 삼각형 BHE, DHG에서
$\angle EHB=\angle GHD$ (맞꼭지각)
직선 AB와 직선 DC가 서로 평행하므로
$\angle HBE=\angle HDG$ (엇각)
그러므로 두 삼각형 BHE, DHG는 서로 닮음이다.
$\overline{BH}:\overline{DH}=\overline{BE}:\overline{DG}=45:10=9:2$ 에서
$\overline{DH}=\frac{2}{11}\times\overline{BD}$
두 삼각형 BHE, DHG는 닮음비가 $9:2$ 이므로
$\triangle BHE:\triangle DHG=81:4$
$\triangle BHE=\frac{81}{4}\times\triangle DHG=\frac{81}{4}\times35=\frac{2835}{4}$
두 삼각형 BFE, DFC에서
$\angle EFB=\angle CFD$ (맞꼭지각)
직선 AB와 직선 DC가 서로 평행하므로
$\angle BEF=\angle DCF$ (엇각)
그러므로 두 삼각형 BFE, DFC는 서로 닮음이다.
평행사변형 ABCD에서 $\overline{CD}=\overline{AB}=30$
$\overline{BF}:\overline{DF}=\overline{EB}:\overline{CD}=45:30=3:2$ 에서
$\overline{DF}=\frac{2}{5}\times\overline{BD}$, $\overline{BF}=\frac{3}{5}\times\overline{BD}$
$\overline{FH}=\overline{DF}-\overline{DH}$
$=\frac{2}{5}\times\overline{BD}-\frac{2}{11}\times\overline{BD}$
$=\frac{12}{55}\times\overline{BD}$
두 삼각형 EBF, EFH에서 밑변을 각각
선분 BF, 선분 FH라 하면 두 삼각형의 높이는 같다.
$\overline{BF}=\frac{3}{5}\times\overline{BD}$, $\overline{FH}=\frac{12}{55}\times\overline{BD}$ 이므로
$\overline{BF}:\overline{FH}=\frac{3}{5}:\frac{12}{55}=11:4$ 에서
$\triangle EBF:\triangle EFH=11:4$
따라서
$\triangle EFH=\frac{4}{15}\times\triangle EBH=\frac{4}{15}\times\frac{2835}{4}$
$=189$

22. **[출제의도] 일차부등식의 해를 계산하여 조건을 만족시키는 자연수의 최솟값을 구한다.**

$4x-30>x+7$, $3x>37$
$x>\frac{37}{3}$
$\frac{37}{3}=12.333\cdots$ 이므로
일차부등식을 만족시키는 자연수 x의 최솟값은 13

23. **[출제의도] 나눗셈을 계산하여 분수를 순환소수로 나타내고 조건을 만족시키는 값을 구한다.**

분수 $\frac{3}{22}$을 소수로 나타내면

$\frac{3}{22}=0.1363636\cdots$

소수점 아래 여섯 번째 자리의 숫자는 3

24. [출제의도] 편차의 성질을 이해하여 자료의 분산을 구한다.

편차의 합은 0이므로

$-1+7+3+(-4)+a=0$

$a=-5$

분산은 편차의 제곱의 평균이므로 구하는 값은

$\frac{(-1)^2+7^2+3^2+(-4)^2+(-5)^2}{5}=\frac{100}{5}=20$

25. [출제의도] 소인수분해를 이해하여 조건을 만족시키는 직육면체의 겉넓이를 구한다.

가로의 길이가 a, 세로의 길이가 b, 높이가 c인 직육면체의 부피가 33이므로

$abc=33=3\times 11$

a, b, c의 값이 자연수이므로 가능한 경우는 다음과 같다.

(i) a, b, c의 값이 1, 3, 11인 경우

$a+b+c=15$이므로 $a+b+c$는 7의 배수가 아니다.

(ii) a, b, c의 값이 1, 1, 33인 경우

$a+b+c=35$이므로 $a+b+c$는 7의 배수이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a, b, c의 값은 1, 1, 33이다.

따라서 직육면체의 겉넓이는

$2(ab+bc+ca)=2\times(1\times 1+1\times 33+33\times 1)$

$=134$

26. [출제의도] 정수와 유리수의 사칙계산을 이용하여 식의 값으로 가능한 가장 큰 값을 추론한다.

$12\times\frac{b-c}{a}$의 값으로 가능한 가장 큰 값이 되기 위해서는 $\frac{b-c}{a}$의 값이 양수여야 하므로

$a>0$, $b-c>0$ 또는 $a<0$, $b-c<0$

$\frac{b-c}{a}$의 값이 양수가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=-\frac{3}{2}$인 경우

$12\times\frac{b-c}{a}=12\times\left[\left\{-\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}\div\frac{4}{3}\right]$

$=9$

(ii) $a=-\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{4}{3}$인 경우

$12\times\frac{b-c}{a}=12\times\left\{\left(-\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\right)\div\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}$

$=\frac{44}{3}$

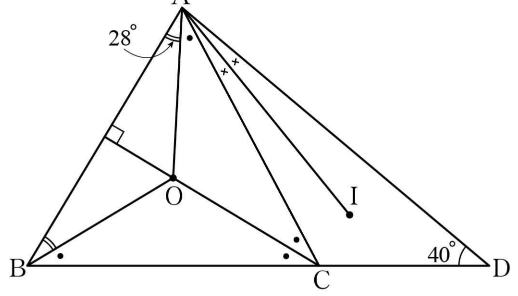
(iii) $a=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$, $c=\frac{4}{3}$인 경우

$12\times\frac{b-c}{a}=12\times\left\{\left(-\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)\div\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$

$=68$

(i), (ii), (iii)에서 $12\times\frac{b-c}{a}$의 값으로 가능한 가장 큰 값은 68

27. [출제의도] 삼각형의 외심과 내심의 성질을 이용하여 각의 크기를 구하는 문제를 해결한다.



점 O가 삼각형 ABC의 외심이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$

세 삼각형 OAB, OBC, OCA는 이등변삼각형이므로

$\angle OBA=\angle BAO$, $\angle CBO=\angle OCB$, $\angle ACO=\angle OAC$

삼각형 ABC는 $\overline{AC}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이므로

각 ACB의 이등분선은 밑변 AB를 수직이등분한다.

삼각형 ABC의 외심 O는 세 변의 수직이등분선의 교점이므로 점 O는 각 ACB의 이등분선 위에 있다.

$\angle ACO=\angle OCB$

삼각형 ABC의 세 내각의 크기의 합은

$\angle BAC+\angle CBA+\angle ACB$

$=(\angle BAO+\angle OAC)+(\angle CBO+\angle OBA)$

$+(\angle ACO+\angle OCB)$

$=2\times\angle BAO+4\times\angle OAC$

$=2\times 28^\circ+4\times\angle OAC$

$=180^\circ$

$\angle OAC=\frac{180^\circ-56^\circ}{4}=31^\circ$

삼각형 ACD에서 각 C의 외각 ACB의 크기는

$\angle ACB=\angle CAD+\angle ADC$

$\angle CAD=\angle ACB-\angle ADC$

$=2\times 31^\circ-40^\circ=22^\circ$

삼각형의 내심은 세 내각의 이등분선의 교점이므로

$\angle CAI=\angle IAD$

$\angle CAD=2\times\angle CAI$

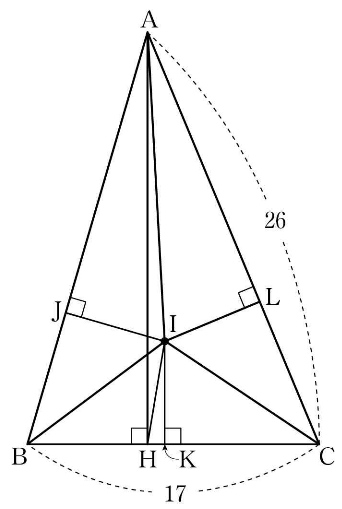
$\angle CAI=\frac{1}{2}\times\angle CAD$

$=\frac{1}{2}\times 22^\circ=11^\circ$

$\angle OAI=\angle OAC+\angle CAI=31^\circ+11^\circ=42^\circ$

따라서 $x=42$

28. [출제의도] 삼각형의 내심과 피타고라스 정리를 이용하여 선분의 길이를 구하는 문제를 해결한다.



삼각형 ABC의 넓이가 204이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times 17\times\overline{AH}=204$

$\overline{AH}=24$

직각삼각형 AHC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AH}^2+\overline{HC}^2$

$\overline{HC}^2=\overline{AC}^2-\overline{AH}^2$

$=26^2-24^2=100$

$\overline{HC}=10$

$\overline{BH}=\overline{BC}-\overline{HC}=17-10=7$

직각삼각형 ABH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{BH}^2+\overline{AH}^2$

$=7^2+24^2=625$

$\overline{AB}=25$

점 I에서 세 변 AB, BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 J, K, L이라 하자.

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r이라 하면 삼각형의 내심의 성질에 의하여 $\overline{IJ}=\overline{IK}=\overline{IL}=r$

$\triangle ABC=\triangle IAB+\triangle IBC+\triangle ICA$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times r+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times r+\frac{1}{2}\times\overline{CA}\times r$

$=\frac{1}{2}\times(25+17+26)\times r$

$=34r$

$34r=204$에서 $r=6$

두 직각삼각형 IKC, ILC에서

$\angle IKC=\angle ILC=90^\circ$, $\overline{IK}=\overline{IL}$, $\overline{IC}$는 공통이므로

두 직각삼각형 IKC, ILC는 서로 합동이다.

그러므로 $\overline{CK}=\overline{CL}$

같은 방법으로

두 직각삼각형 ILA, IJA가 서로 합동이고 $\overline{AL}=\overline{AJ}$,

두 직각삼각형 IJB, IKB가 서로 합동이고 $\overline{BJ}=\overline{BK}$

$\overline{HK}=x$라 하면

$\overline{CK}=\overline{CL}=10-x$

$\overline{AL}=\overline{AJ}=26-(10-x)=16+x$

$\overline{BJ}=\overline{BK}=25-(16+x)=9-x$

$\overline{BC}=\overline{BK}+\overline{KC}$

$=(9-x)+(10-x)$

$=19-2x=17$

$2x=2$, $x=1$

직각삼각형 IHK에서

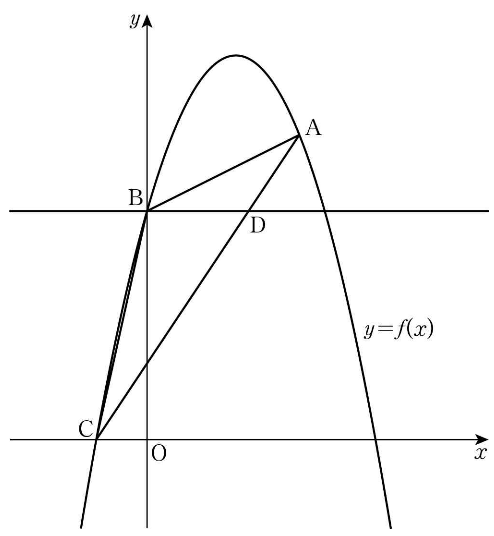
$\overline{HK}=1$, $\overline{IK}=6$

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{IH}^2=\overline{HK}^2+\overline{IK}^2=1^2+6^2$

$=37$

29. [출제의도] 삼각형의 넓이를 이용하여 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 추론한다.



두 삼각형 ABD, BCD의 넓이가 각각 $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$이므로

$\triangle ABD:\triangle BCD=1:3$

두 삼각형 ABD, BCD의 밑변을 선분 BD라 하면

두 삼각형의 높이의 비는 $1:3$이다.

두 삼각형의 높이의 합은 점 A의 y좌표인 6이므로

점 B의 좌표를 $(0, q)$라 하면

$q=6\times\frac{3}{4}=\frac{9}{2}$

삼각형 BCD의 넓이가 $\frac{9}{2}$이므로

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$

$\overline{BD}=2$

점 D의 좌표는 $\left(2, \frac{9}{2}\right)$

점 $D\left(2, \frac{9}{2}\right)$, 점 $A(3, 6)$을 지나는 직선은

x의 값이 1만큼 증가할 때, y의 값은 $\frac{3}{2}$만큼 증가하므로 이 직선의 기울기는 $\frac{3}{2}$이다.

직선 DA의 방정식을 $y=\frac{3}{2}x+n$이라 하면

이 직선이 점 $A(3, 6)$을 지나므로

$6=\frac{3}{2}\times 3+n$, $n=\frac{3}{2}$

그러므로 직선 DA의 방정식은 $y=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$

$y=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$에 $y=0$을 대입하면 $x=-1$이므로

점 C의 좌표는 $(-1, 0)$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{B}\left(0, \frac{9}{2}\right)$를 지나므로

$f(x)=ax^2+bx+\frac{9}{2}$ (a, b는 상수, $a<0$)이라 하자.

점 $\mathrm{A}(3, 6)$이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(3)=9a+3b+\frac{9}{2}=6$

$3a+b=\frac{1}{2}$ …… ㉠

점 $\mathrm{C}(-1, 0)$이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(-1)=a-b+\frac{9}{2}=0$

$a-b=-\frac{9}{2}$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 변끼리 더하면

$4a=-4$, $a=-1$

$a=-1$을 ㉡에 대입하면

$-1-b=-\frac{9}{2}$, $b=\frac{7}{2}$

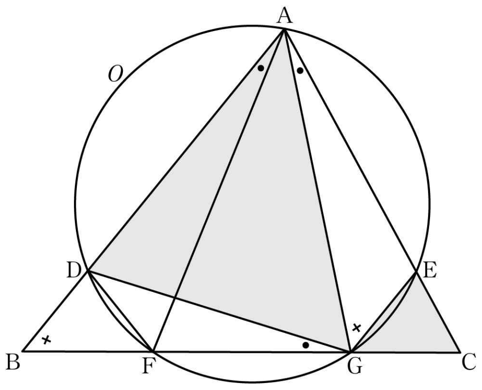
$f(x)=-x^2+\frac{7}{2}x+\frac{9}{2}=-\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{121}{16}$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $\left(\frac{7}{4}, \frac{121}{16}\right)$

이므로 $k=\frac{121}{16}$

$16k=16\times\frac{121}{16}=121$

30. [출제의도] 원의 성질과 삼각형의 닮음을 이용하여 두 삼각형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.



$\overline{\mathrm{DF}}=\overline{\mathrm{EG}}$이므로 호 DF의 길이와 호 GE의 길이가 같다. 원주각의 성질에 의하여

$\angle\mathrm{DAF}=\angle\mathrm{GAE}$

사각형 ADGE가 원 O에 내접하므로

$\angle\mathrm{GDA}+\angle\mathrm{AEG}=180^\circ$

$\angle\mathrm{AEG}+\angle\mathrm{GEC}=180^\circ$

그러므로 $\angle\mathrm{GDA}=\angle\mathrm{GEC}$

사각형 AFGE가 원 O에 내접하므로

$\angle\mathrm{FAE}+\angle\mathrm{EGF}=180^\circ$

$\angle\mathrm{EGF}+\angle\mathrm{CGE}=180^\circ$

그러므로 $\angle\mathrm{FAE}=\angle\mathrm{CGE}$

$\angle\mathrm{FAE}=\angle\mathrm{FAG}+\angle\mathrm{GAE}$

$=\angle\mathrm{FAG}+\angle\mathrm{DAF}$

$=\angle\mathrm{DAG}$

두 삼각형 EGC, DAG에서

$\angle\mathrm{GEC}=\angle\mathrm{ADG}$, $\angle\mathrm{CGE}=\angle\mathrm{GAD}$이므로

두 삼각형 EGC, DAG는 서로 닮음이다.

$\overline{\mathrm{AG}}=3\times\overline{\mathrm{GC}}$이므로 두 삼각형 EGC, DAG의 닮음비는 $1:3$이고, 넓이의 비는 $1:9$이다.

삼각형 EGC의 넓이가 8이므로

$\triangle\mathrm{EGC}:\triangle\mathrm{DAG}=8:\triangle\mathrm{DAG}=1:9$

$\triangle\mathrm{DAG}=72$

$\overline{\mathrm{DF}}=\overline{\mathrm{EG}}$이므로 호 DF의 길이와 호 GE의 길이가 같다. 원주각의 성질에 의하여

$\angle\mathrm{DGF}=\angle\mathrm{GAE}$

$\angle\mathrm{GDA}=\angle\mathrm{GEC}$에서

$\angle\mathrm{BDG}=180^\circ-\angle\mathrm{GDA}$, $\angle\mathrm{AEG}=180^\circ-\angle\mathrm{GEC}$이므로

$\angle\mathrm{BDG}=\angle\mathrm{AEG}$

두 삼각형 DBG, EGA에서

$\angle\mathrm{DGB}=\angle\mathrm{EAG}$, $\angle\mathrm{BDG}=\angle\mathrm{GEA}$이고

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle\mathrm{GBD}=\angle\mathrm{AGE}$

$\overline{\mathrm{DB}}=\overline{\mathrm{EG}}$, $\angle\mathrm{BDG}=\angle\mathrm{GEA}$, $\angle\mathrm{GBD}=\angle\mathrm{AGE}$이므로

두 삼각형 DBG, EGA는 서로 합동이다.

그러므로 $\triangle\mathrm{DBG}=\triangle\mathrm{EGA}$

$S=\triangle\mathrm{ADG}+\triangle\mathrm{DBG}$

$=72+\triangle\mathrm{DBG}$

$T=\triangle\mathrm{EGC}+\triangle\mathrm{EGA}$

$=8+\triangle\mathrm{EGA}$

따라서 $S-T=72-8=64$